

7. Wahrscheinlichkeitsbegriff und Unabhängigkeit

Für die Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(A)$ eines Ereignisses A gelten die

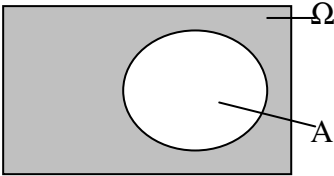
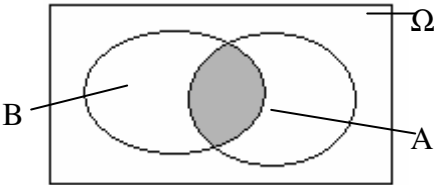
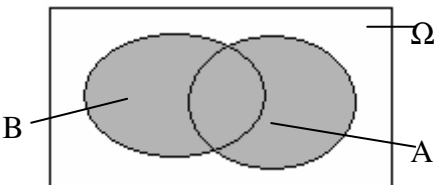
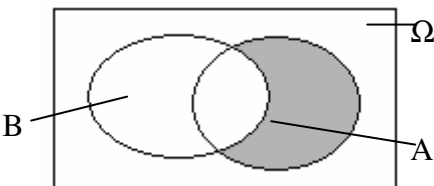
Axiome von Kolmogorow:

Axion I: $P(A) \geq 0$

Axion II: $P(\Omega) = 1$

Axiom III: Wenn $A \cap B = \{ \}$, dann muss gelten: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

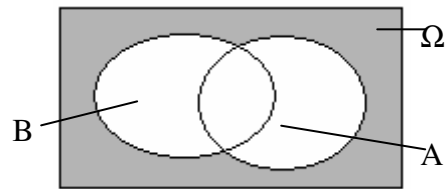
Zusammengesetzte Ereignisse

Formulierung	Schreibweise	Graphische Darstellung
Gegenereignis von A	$\bar{A} = \Omega \setminus A$	
Ereignis A und B	$A \cap B$	
Ereignis A oder B	$A \cup B$	
Ereignis A ohne B = Ereignis A und nicht Ereignis B	$A \setminus B = A \cap \bar{B}$	

Gesetz von de Morgan

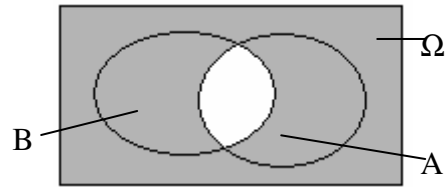
Weder Ereignis A
noch Ereignis B treten ein

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$



Nicht beide Ereignisse A
B gleichzeitig

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



Additionssatz

Für zwei Ereignisse A und B gilt: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse sind stochastisch unabhängig, wenn gilt:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Unterscheide: Wahrscheinlichkeit von A und B:

$$P(A \cap B)$$

Wahrscheinlichkeit von A unter der Voraussetzung von B: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Unvereinbarkeit von A und B:

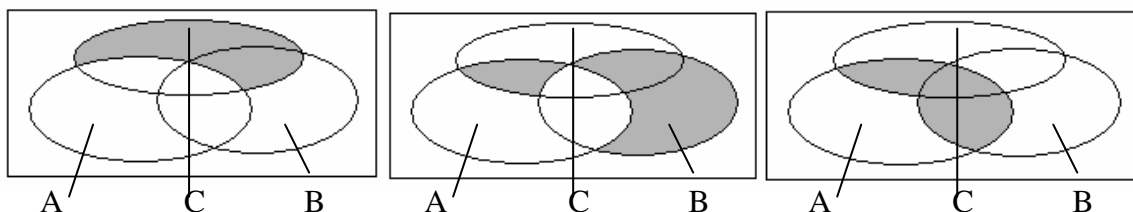
$$P(A \cap B) = \{ \}$$

Unabhängigkeit von A und B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Übungsaufgaben

- Ein Würfel wird zweimal geworfen.
 - Untersuchen Sie folgende Ereignisse paarweise auf Unabhängigkeit
A: Gerade Augenzahl beim ersten Wurf
B: Augensumme ist sieben
C: Beim zweiten Wurf Augenzahl 5 oder 6
 - Bestimmen Sie $P(A \cap B \cap C)$ und $P_{A \cap B}(C)$
- Die Ereignisse A, B und C sind in einem Mengendiagramm veranschaulicht. Drücken Sie jeweils das zu den grau markierten Flächen gehörige Ereignis durch A, B und C aus.



3. In einem Zufallsexperiment sind die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse A und B bekannt: $P(A) = 0,7$ und $P(B) = 0,8$
- Wie groß muss $P(A \cap B)$ mindestens sein?
Wie groß sind dann $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$
 - Wie groß kann $P(A \cap B)$ maximal sein?
Wie groß sind dann $P(A \setminus B)$, $P(B \setminus A)$, $P(A \cup B)$, $P(\overline{A})$
4. Von den Schülerinnen und Schülern eines Gymnasiums wird zufällig eine Person ausgewählt.
Folgende Ereignisse werden betrachtet:
M: Person ist männlich
B: Person hat blonde Haare
- Beschreiben Sie mit Worten, welche Wahrscheinlichkeiten jeweils gemeint ist.
 $P(\overline{B})$, $P(M \cap B)$, $P(M \cup B)$, $P(M \setminus B)$, $P_B(M)$, $P(\overline{M \cap B})$
 - Beschreiben Sie jeweils mit Hilfe von B und M
 - Die Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Person weiblich und blond ist.
 - Die Wahrscheinlichkeit, dass die ausgewählte Person entweder männlich oder blond ist.
 - Wählen Sie geeignete Schülerzahlen, dass die Ereignisse B und M stochastisch unabhängig sind.
5. Ein Tischtennisball muss einen Durchmesser von 40 mm haben und 2,7 Gramm wiegen.
Bei der Produktion können zwei Fehler auftreten:
E: Ball ist nicht exakt kugelförmig
G: Das Gewicht stimmt nicht.
Erfahrungsgemäß haben 8 % der Bälle den Fehler E und 6 % den Fehler G. 2 % aller Bälle sind mit beiden Fehlern behaftet. Der Produktion wird ein Ball zufällig entnommen.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er einwandfrei?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er nur den Fehler E?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er den Fehler G, wenn er den Fehler E hat?
 - Sind die Fehler E und G unabhängig?
6. Über die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse C und D gibt die folgende Vierfeldertafel Auskunft:
- | | | | |
|----------------|-----|----------------|-----|
| | C | $\overline{C}$ | |
| D | | | 0,3 |
| $\overline{D}$ | | 0,07 | |
| | 0,9 | | |
- Begründen Sie: C und D sind unabhängig
 - Bestimmen Sie $P(C \cap D)$, $P(D \setminus C)$, $P_D(C)$
 - Woran erkennt man in einem entsprechenden Baumdiagramm die Unabhängigkeit der Ereignisse C und D?
7. Bei der Produktion elektronischer Bauteile hat einen Ausschuss von 15 %. In der Endkontrolle wird ein nicht voll funktionsfähiges Bauteil mit 90 % Wahrscheinlichkeit erkannt. Ein einwandfreies Bauteil wird in der Endkontrolle mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % versehentlich reklamiert.
- Erstellen Sie ein geeignetes Baumdiagramm und eine geeignete Vierfeldertafel
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Bauteil nicht funktionstüchtig, wenn es in der Endkontrolle reklamiert wurde?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Bauteil voll funktionstüchtig, wenn es die Endkontrolle unbeanstandet passiert hat?

Lösungen

$$1. A = \{(21)(22)\dots(64)(65)(66)\} \Rightarrow P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(16)(25)\dots(53)(61)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$C = \{(15)(25)\dots(56)(66)\} \Rightarrow P(C) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$a. P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$P(A \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(C) \Rightarrow \text{abhängig}$$

$$P(B \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = P(B) \cdot P(C) \Rightarrow \text{unabhängig}$$

$$b. P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}; P_{A \cap B}(C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{12}} = \frac{1}{3}$$

$$2. C \setminus A, (B \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus (A \cap B \cap C)), (B \cup C) \cap A$$

3. $P(A \cap B)$ muss mindestens 0,5 sein. Dann haben die Ereignisse A und B die wenigsten Elemente gemeinsam.

$$P(A \setminus B) = 0,2, P(B \setminus A) = 0,3, P(A \cup B) = 1, P(\bar{A}) = 0,3$$

$P(A \cap B)$ kann höchstens 0,7 sein. Dann liegt Ereignisse A vollständig in B.

$$P(A \setminus B) = 0, P(B \setminus A) = 0,1, P(A \cup B) = 0,8, P(\bar{A}) = 0,3$$

4. M: Person ist männlich

B: Person hat blonde Haare

a. $P(\bar{B})$ = Wahrscheinlichkeit für Person hat keine blonden Haare

$P(M \cap B)$ = Wahrscheinlichkeit für Person ist männlich und blond

$P(M \cup B)$ = Wahrscheinlichkeit für Person ist männlich oder blond oder beides

$P(M \setminus B)$ = Wahrscheinlichkeit für Person ist Männlich, aber nicht blond

$P_B(M)$ = Wahrscheinlichkeit für eine männliche Person unter den blonden

$P(\overline{M \cap B})$ = Wahrscheinlichkeit für nicht männlich und blond gleichzeitig

b. Beschreibe mit Hilfe von B und M

i. $P(\bar{M} \cap B)$

ii. $P((M \cap \bar{B}) \cup (\bar{M} \cap B))$

5. Aus den Angaben lässt sich die folgende Vierfeldertafel aufstellen. Die grau hinterlegten Felder stehen in der Angabe.

	E	$\bar{E}$	
G	0,02	0,04	0,06
$\bar{G}$	0,06	0,88	0,94
	0,08	0,92	1

a. $P(\overline{E \cup G}) = 1 - P(E \cap G) = 0,98$

b. $P(E \cap \bar{G}) = 0,06$

c. $P_E(G) = \frac{P(E \cap G)}{P(E)} = \frac{0,02}{0,08} = 25\%$

d. $P(E \cap G) = 0,02 \neq 0,08 \cdot 0,06 = P(E) \cdot P(G) \Rightarrow \text{abhängig}$

6. Vollständige Vierfeldertafel

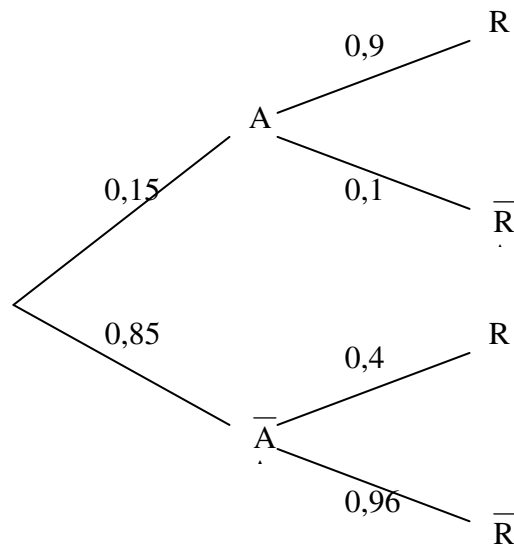
	C	$\bar{C}$	
D	0,27	0,03	0,3
$\bar{D}$	0,63	0,07	0,7
	0,9	0,1	

- $P(C \cap D) = 0,27 = 0,9 \cdot 0,3 = P(C) \cdot P(D) \Rightarrow$ unabhängig
- $P(C \cap D) = 0,27$, $P(D \setminus C) = 0,03$, $P_D(C) = P(C) = 0,3$
- Die Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen zu D ist beim Ast von C aus die selbe wie beim Ast von $\bar{C}$ aus.

7. A = Bauteil ist Ausschuss
R = Bauteil wird reklamiert

a.

Baumdiagramm



Vierfeldertafel

	A	$\bar{A}$	
R	$0,15 \cdot 0,9 = 0,135$	$0,4 \cdot 0,85 = 0,34$	0,475
$\bar{R}$	0,015	0,51	0,525
	0,15	0,85	1

- $P_R(A) = \frac{P(R \cap A)}{P(R)} = \frac{0,135}{0,475} \approx 0,28$
- $P_{\bar{R}}(\bar{A}) = \frac{P(\bar{R} \cap \bar{A})}{P(\bar{R})} = \frac{0,015}{0,525} \approx 0,03$